Eine Dissertation über Kettenbrüche *

Leonhard Euler

§1 Es sind in der Analysis verschiedene Arten gebräuchlich geworden, Größen, die ansonsten schwer angegeben werden können, angemehm auszudrücken. Natürlich pflegen irrationale und transzendente Größen, von welcher Art Logarithmen, Kreisbogen und Quadraturen anderer Kurven sind, durch unendliche Reihen dargeboten zu werden, die, weil sie aus bekannten Termen bestehen, die Werte jener Größen hinreichend deutlich aufzeigen. Aber es gibt zwei Geschlechter von Reihen, auf deren erstes sich jene Reihen beziehen, deren Terme durch Addition oder Subtraktion verbunden sind; zum zweiten können hingegen die gezählt werden, deren Terme durch Multiplikation verbunden werden. So pflegt auf jede der beiden Weisen die Fläche des Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, ausgedrückt zu werden; auf die erste wird natürlich die Kreisfläche gesagt, diesem Ausdruck gleich zu sein

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc. bis ins Unendliche,}$$

auf die zweite Weise wird dieselbe Fläche hingegen diesem Ausdruck gleich

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11} \text{etc. bis ins Unendliche.}$$

*Originaltitel: "De fractionibus continuis dissertatio", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9 1744, pp. 98-137", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 187 - 215 ", Eneström-Nummer E71, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Von diesen Reihen werden jene den übrigen mit Recht vorgezogen, die sehr stark konvergieren und durch Nehmen auch nur sehr weniger Terme den Wert der gesuchten Größe näherungsweise liefern.

§2 Diesen zwei Geschlechtern von Reihen scheint nicht zu Unrecht ein drittes hinzuzufügen zu sein, dessen Terme durch ununterbrochene Division miteinander verbunden werden, welche Reihen deshalb passenderweise *Kettenbrüche* genannt werden. Dieses Geschlecht ist freilich weniger gebräuchlich als die zwei übrigen; aber es führt nicht nur gleichermaßen klar den Wert der Größe, welche sie ausdrückt, vor Augen, sondern es ist auch überaus geeignet, um jenen Wert näherungsweise zu finden. Dieses Geschlecht von Reihen ist aber immer noch so wenig ausgearbeitet, dass man außer ein paar schon bekannten Reihen dieses Geschlechts nicht einmal eine Methode hat entweder die wahren Werte dieser Reihen zu finden oder gegebene transzendente Größen in solche umzuwandeln. Nachdem ich also schon vor langer Zeit an der Erforschung dieser Kettenbrüche gearbeitet hatte und viele Dinge sowohl über deren Gebrauch als auch über das Finden derer von nicht geringer Bedeutung beobachtet hatte, habe ich beschlossen, sie hier zu erklären, damit ich es anderen erleichtere, dieselben Dinge zu behandeln. Obwohl ich nämlich noch nicht zu einer vollständigen Lehre dieser Theorie gelangt bin, bin ich mir dennoch dessen sicher, dass diese Dinge, die ich mit sehr großer Arbeit gefunden habe, eine ausgezeichnete Hilfe sein werden, um diese Theorie noch mehr zu vervollkommnen.

§3 Damit also das, was ich unter der Bezeichnung Kettenbruch verstehe, besser begriffen wird, biete ich vor allem Anderen ein sehr weitreichendes Beispiel derer dar

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{etc.}}}}}}$$

aus welcher Schreibweise jeder die Bedeutung dieses Ausdruckes leicht erkennen wird. Natürlich besteht diese Größe aus zwei Gliedern, der ganzen Zahl a und dem Bruch, dessen Zähler α ist, der Nenner ist aber wiederum aus zwei Gliedern zusammengesetzt, natürlich dem ganzzahligen b und dem Bruch, dessen Zähler β ist, der Nenner besteht hingegen wiederum aus zwei Gliedern, selbstredend dem ganzzahligen c und einem Bruch; und so weiter bis ins Unendliche. Hier tauchen zwei Größen auf, welche ich auch mit aus dem lateinischen und griechischen Alphabet entnommenen Buchstaben unterschieden habe. Von diesen Größen werde ich die, welche ich auch mit griechischen Buchstaben bezeichnet habe, *Zähler* nennen, weil sie in der Tat die Zähler der folgenden Brüche festlegen. Die übrigen mit den lateinischen Buchstaben ausgedrückten Größen werde ich zur Unterscheidung hingegen alle als *Nenner* bezeichnen; denn in der Tat sind alle außer dem ersten Teile der Nenner.

§4 Der erste, der, sofern mir bekannt ist, einen Kettenbruch dieser Art hervorgebracht hat, war Lord Brouncker, der nach Mitteilen der Formel von Wallis für die Quadratur des Kreises denselben Ausdruck so verwandelt hat, dass er versicherte, dass sich die Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers verhält wie 1 zu

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\text{etc.}}}}}}$$

wo die Zähler die Quadrate der ungeraden Zahlen sind, die Nenner hingegen alle 2. Aber auf welchem Wege BROUNCKER auf diesen Ausdruck gestoßen ist, ist nicht bekannt, und es wäre mit Recht zu bedauern, wenn seine Methode verloren gegangen wäre, weil nicht zu bezweifeln ist, dass mit derselben Methode sehr viele wunderschöne Dinge in diesem Geschlecht dargeboten werden könnten. WALLIS hat freilich, während er diesen Kettenbruch eingehend einer Untersuchung unterzog, selbst versucht, einen Beweis zu geben, der aber weniger natürlich und von der von der Methode des Urhebers vollkommen verschieden zu sein scheint. WALLIS hat aber den ganzen Fund aus dem folgenden Lehrsatz abgeleitet, dass gilt

$$a^2 = (a-1) + \cfrac{1}{2(a-1) + \cfrac{9}{2(a-1) + \cfrac{25}{2(a-1) + \text{etc.}}}} \times (a+1) + \cfrac{1}{2(a+1) + \cfrac{9}{2(a+1) + \cfrac{25}{2(a+1) + \text{etc.}}}}$$

dessen Gültigkeit er durch Induktion hinreichend bestätigt hat, aber, was das Wichtigste ist, er hat die Analysis nicht beigefügt, mit welcher er zu diesem Lehrsatz gelangt ist.

§5 Aber bequem und leicht kann hingegen aus einem gegebenen Kettenbruch dieser Art sein Näherungwert bestimmt werden, ja es ist sogar auch möglich, Grenzen anzugeben, zwischen welchen der wahre Wert enthalten ist, dass, wenn eine gewisse Quadratur oder eine andere transzendente Größe auf diese Weise ausgedrückt war, sie als leichte Aufgabe näherungsweise angegeben werden kann. Ich möche dies aber aus der allgemeinen Form der Kettenbrüche zeigen

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \text{etc.}}}}}$$

in welcher ich alle eingehenden Größen positiv zu sein festlege. Es ist aber in der Tat klar, dass ein Näherungswert erhalten wird, wenn der Kettenbruch irgendwo abgebrochen wird, und ein umso genauerer Wert gefunden werden wird, umso weiter der Bruch fortgesetzt wird. So wird man durch Nehmen von nur a einen kleineren Wert als den wahren haben, weil der ganze angeheftete Bruch vernachlässigt wird. Aber durch Nehmen von

$$a+\frac{\alpha}{b}$$

wird man einen kleineren Wert haben als den wahren, weil im Bruch der Nenner b kleiner ist als der richtige. Wenn aber dann dieser Bruch genommen wird

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\text{etc.}}}$$

wird man wiederum einen wegen des Bruches $\frac{\beta}{c}$ und des daher zu großen Nenners $b+\frac{\beta}{c}$ größeren Wert als den richtigen haben. Und indem auf diese Weise der Kettenbruch immer wieder abgebrochen wird, werden abwechselnd größere und kleinere Werte als der richtige hervorgehen; daher wird es möglich sein, so beliebig nahe an der wahren Wert des Kettenbruches heranzukommen.

§6 Man wird also die folgende Reihe von Ausdrücken haben

$$a \qquad a+\frac{\alpha}{b} \qquad a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}} \qquad a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}} \qquad \text{etc.};$$

von diesen sind die in der Reihe ungeraden, wie der erste, der dritte, der fünfte etc. kleiner als der wahre Wert der Kettenbruches; aber die geraden werden größer sein als derselbe. Daher, weil der dritte Term größer ist als der erste, der fünfte größer als der dritte und so weiter, werden die ungeraden Terme beim Wachsen schließlich den wahren Wert des Kettenbruches erreichen; die ungeraden Terme, die ununterbrochen schrumpfen, werden hingegen beim Schrumpfen schließlich zum wahren Wert des Kettenbruches herabkommen. Wenn aber diese Ausdrücke in einfache Brüche verwandelt werden, wird die folgende Reihe derselben Ausdrücke hervorgehen

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{ab+\alpha}{b}, \quad \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}, \quad \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \quad \text{etc.};$$

wenn diese aufmerksamer angeschaut wird, wird das Gesetz leicht erschlossen werden, nach welchem diese Terme fortschreiten und mit dessen Hilfe es möglich ist, ohne die mühevolle Reduktion jener zusammengesetzter Brüche diese Brüche, so weit wie es beliebt, fortzusetzen. Diese Brüche werden freilich sehr schnell äußerst lang; aber in den Beispielen, in welchen diese Buchstaben mit Zahlen ausgedrückt werden, wird diese Reihe überaus angenehm fortgesetzt.

§7 Aber das Fortschreitungsgesetz dieser Brüche wird aus dem folgenden Schema deutlich erkannt werden:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+\alpha}{b}, & \frac{abc+\alpha c+\beta a}{bc+\beta}, & \frac{abcd+\alpha cd+\beta ad+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} & \text{etc.} \end{array}$$

Natürlich sind über diese Brüche die Nenner des Kettenbruches geschrieben worden, darunter hingegen die Zähler als Indizes; den Brüchen selbst ist aber der Bruch $\frac{1}{0}$ vorangestellt worden, welcher natürlich aus dem bald zu erklärenden Gesetz an diesen Platz gesetzt worden ist. Nun besteht das Fortschreitungsgesetz darin, dass der Zähler eines jeden Bruches mit dem darüber geschriebenen Index multipliziert zusammen mit dem Zähler des vorhergehenden Bruches mit seinem darunter geschriebenen Index multipliziert den Zähler des folgenden Bruches liefert, und auf dieselbe Weise der Nenner eines jeden Bruches mit seinem darüber platzierten Index multipliziert zusammen mit dem Nenner des vorhergehenden Bruches mit seinem darunter geschriebenen Index multipliziert den Nenner des folgenden Bruches an die Hand gibt. Dieses Gesetz wird freilich aus der Betrachtung dieser Brüche selbst, wenn sie weiter fortgesetzt werden, leicht beobachtet; aber dasselbe kann auch aus der Natur der Kettenbrüche selbst abgeleitet werden. Aber ich glaube, dass es überflüssig wäre, den Beweis hier hinzuzufügen.

§8 Wenn die Differenzen dieser Brüche genommen werden, indem jeder vom jeweils vorhergehenden subtrahiert wird, wird die folgende Reihe entspringen

$$\frac{1}{0}, \quad -\frac{\alpha}{1\cdot b}, \quad +\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}, \quad -\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} \quad \text{etc.},$$

die Progression der Zähler welcher per se offenbar ist, die Nenner werden hingegen aus den zwei vorhergehenden Nennern gebildet. Weil also der letzte Term, der den wahren Wert des Kettenbruches darbietet, der oberen Reihe aus dem ersten, welchen wir nach Verwerfen $\frac{1}{0}$ als a nehmen wollen, und allen Differenzen zusammengesetzt wird, wird der wahre Wert des vorgelegten Kettenbruches dieser sein

$$a+\frac{\alpha}{1\cdot b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\dots)}+\text{etc.}$$

Wir haben daher eine unendliche Reihe des ersten Geschlechts, deren Terme durch Addition und Subtraktion miteinander verbunden sind und die dem Wert des vorgelegten Kettenbruches gleich ist; und diese Reihe konvergiert sehr stark und ist, um jenen Wert näherungsweise zu finden, überaus geeignet. Wenn je zwei Terme zusammengefasst werden, um das Alternieren der Vorzeichen zu vermeiden, wird derselbe Kettenbruch der folgenden Reihe gleich aufgefunden werden

$$a+\frac{\alpha c}{1(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma e}{(bc+\beta)(bcde+\beta de+\gamma de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\text{etc.},$$

das Bildungsgesetz der Zähler und der Nenner von welcher sich aus der oberen von selbst zeigt. Aber diese Reihe konvergiert überaus gut, und mit ihrer Hilfe kann in der Tat sehr schnell eine Näherungssumme gefunden werden.

§9 Umso mehr also diese zuletzt gefundene Reihe konvergiert, umso mehr ist auch der Kettenbruch zu konvergieren anzusehen, weil eine gegebene Anzahl der Terme der Reihe der gegebenen Anzahl der Brüche des Kettenbruches entspricht. Es ist also klar, dass der Kettenbruch umso mehr konvergiert, umso kleiner seine Zähler α, β, γ etc. und umso größer die Nenner a, b, c etc. sind. Aber all diese Zahlen, so die Zähler wie die Nenner, lassen sich als ganze Zahlen festlegen; denn wenn sie gebrochen wären, könnten sie durch die bekannte Reduktion von Brüchen in ganze Zahlen verwandelt werden, indem natürlich die Zähler und Nenner der Brüche mit derselben Zahl multipliziert werden. Nachdem also alle Zahlen, so α, β, γ etc. wie a, b, c etc., als ganzzahlig festgelegt worden sind, wird der Kettenbruch am stärksten konvergieren, wenn alle Zähler α, β, γ etc. der Einheit gleich werden; des Weiteren wird aber die Konvergenz umso größer, umso größer die Nenner a, b, c, d etc. waren. Natürlich können die Zähler nicht kleiner als die Einheit sein; denn wenn irgendwo ein Zähler $= 0$ wäre, bräche ebendort auch der Kettenbruch ab und der Bruch wäre endlich. Dasselbe passiert auch, wenn irgendeiner der Nenner $= \infty$ wird; ebendort wird nämlich der Kettenbruch in gleicher Weise abbrechen und in in einen endlichen Kettenbruch übergehen.

§10 Wenn also der folgende Kettenbruch vorgelegt wird, all dessen Zähler Einheiten seien,

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{etc.}}}}}}$$

werden sich die Brüche der folgenden Reihe an seinen Wert annähern

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+c+a}{bc+1}, & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} & \text{etc.,} \end{array}$$

welche Reihe mit Hilfe der einen einzigen Progression der Indizes a, b, c, d etc. fortgesetzt wird. Natürlich wird so der Zäher wie der Nenner eines jeden Bruches mit dem Index multipliziert und respektive um dem Zähler und den Nenner des vorhergehenden Bruches vermehrt den Zähler und den Nenner des folgenden Bruches geben. Des Weiteren wird der Wert dieses Kettenbruches der Summe der folgenden Reihe gleich werden

$$a+\frac{1}{1\cdot b}-\frac{1}{b(bc+1)}+\frac{1}{(bc+1)(bcd+d+b)}-\frac{1}{(bcd+d+b)(bcde+\ldots)}+\text{etc.}$$

oder der Summe dieser, in welche jene leicht transformiert wird,

$$a+\frac{c}{bc+1}+\frac{e}{(bc+1)(bcde+de+be+be+1)}+\text{etc.,}$$

die Nenner welcher Reihe aus allen zweiten Nennern der oberen Reihe von Brüchen gebildet werden und daher leicht fortgesetzt werden.

§11 Wenn in einem solchen Kettenbruch, all dessen Zähler Einheiten sind, die Nenner hingegen gebrochene Zahlen waren, wird es zuträglich sein, einen solchen Kettenbruch in einen anderen zu transformieren, in welchem so die Zähler wie die Nenner ganze Zahlen sind. So, wenn ein Kettenbruch dieser Art vorgelegt gewesen wäre

$$a+\cfrac{1}{\cfrac{b}{B}+\cfrac{1}{\cfrac{c}{C}+\cfrac{1}{\cfrac{d}{D}+\cfrac{1}{\cfrac{e}{E}+\text{etc.}}}}}$$

wird dieser durch Beseitigen der Teilbrüche in die folgende Form verwandelt werden

$$a+\cfrac{B}{b+\cfrac{BC}{c+\cfrac{CD}{d+\cfrac{DE}{e+\text{etc.}}}}}$$

Auf die gleiche Weise kann umgekehrt jeder Kettenbruch in einen anderen Bruch verwandelt werden, all dessen Zähler Einheiten, die Nenner hingegen die gebrochene Zahlen sind; es wird natürlich gelten

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{etc.}}}}}}=a+\cfrac{1}{\cfrac{b}{\alpha}+\cfrac{1}{\cfrac{\alpha c}{\beta}+\cfrac{1}{\cfrac{\beta d}{\alpha\gamma}+\cfrac{1}{\cfrac{\alpha\gamma e}{\beta\delta}+\cfrac{1}{\cfrac{\beta\delta f}{\alpha\gamma\varepsilon}+\text{etc.}}}}}}$$

welche letzte Form leicht aus der ersten gebildet wird.

§11 [a] Weil also nach Angabe eines Kettenbruches entweder sein wahrer Wert selbst, wenn freilich Bruch abbricht, oder ein dem wahren sehr naher

Wert durch einen gewöhnlichen Kettenbruch dargeboten werden kann, wird auch umgekehrt ein gewöhnlicher Bruch in einen Kettenbruch transformiert werden können. Auf welche Weise diese Transformation bei den Kettenbrüchen durchzuführen ist, all deren Zähler Einheiten, die Nenner hingegen ganze Zahlen sind, möchte ich zuerst zeigen. Aber jeder endliche Bruch, dessen Zähler und Nenner endliche ganze Zahlen sind, wird in einen Kettenbruch von dieser Art transformiert, der irgendwo abbricht; ein Bruch hingegen, dessen Zähler und Nenner unendlich große Zahlen sind, von welcher Art sie bei irrationalen und transzendenten Größen gegeben sind, wird in einen unendlichen Kettenbruch übergehen. Um einen solchen Kettenbruch zu finden, wird es genügen, nur die Nenner angegeben zu haben, weil wir festlegen, dass alle Zähler Einheiten sind. Diese werden aber gefunden werden, indem zwischen Zähler und Nenner des vorgelegten Bruches dieselbe Operation durchgeführt wird, die, um deren größten gemeinsamen Teiler ausfindig zu machen, durchgeführt zu werden pflegt. Natürlich werde der Zähler durch den Nenner und durch den Rest der Nenner und so weiter immer der vorhergehende durch den Rest dividiert. Die aus dieser wiederholten Division entspringenden Quotienten werden die Nenner des gesuchten Kettenbruches sein.

§12 So, wenn dieser Bruch $\frac{A}{B}$ vorgelegt ist, der in einen Kettenbruch zu transformieren sei und all dessen Zähler Einheiten seien, dividiere ich A durch B und der Quotient sei a und der Rest C; durch diesen Rest C werde nun der vorhergehende Divisor B dividiert und der Quotient sei b und der Rest D, durch welchen C dividiert werde, und so weiter, bis schließlich zu einem Rest $= 0$ und einem unendlich großen Quotienten gelangt wird. Diese Operation wird auf die folgende Weise dargestellt

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
B & A & a & & & & \\ \cline{2-3}
 & C & B & b & & & \\ \cline{3-4}
 & & D & C & c & & \\ \cline{4-5}
 & & & E & D & d & \\ \cline{5-6}
 & & & & F & E & e \\ \cline{6-7}
 & & & & & G & \text{etc.}
\end{array}$$

Mit dieser Operation werden also die Quotienten a, b, c, d, e etc. gefunden, nach Erkennen von welchen sein wird

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

Wenn nämlich der Rest $G = 0$ ist, wird sein

$$e = \frac{E}{F} \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{e} = \frac{F}{E}$$

und daher weiter

$$d + \frac{1}{e} = d + \frac{F}{E} = \frac{D}{E} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{e}} = \frac{E}{D},$$

$$c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}} = c + \frac{E}{D} = \frac{C}{D}.$$

Und indem auf diese Weise bis ins Unendliche weitergemacht wird, wird der Kettenbruch $= \frac{A}{B}$ aufgefunden werden.

§13 Wenn im Bruch $\frac{A}{B}$ $A < B$ war, dann wird der erste Quotient $a = 0$ und der erste Rest $= A$ sein, so dass dann B durch A dividiert werden muss. In diesem Fall wird also sein

$$\frac{A}{B} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

Aber im Fall, in dem $A < B$ ist, wird ein einziger Term im Kettenbruch hervorgehen, wenn das Verhältnis zwischen A und B ein vielfaches war; aber der Kettenbruch wird aus zwei Termen bestehen, wenn sich das Verhältnis $A : B$ auf das Geschlecht der superpartikulären Verhältnisse bezieht; es werden hingegen mehr hinzukommen, wenn das Verhältnis $A : B$ zum Geschlecht der superpartienten gerechnet wird. Aber der Kettenbruch wird in Wirklichkeit ins Unendliche laufen, wenn das Verhältnis A zu B nicht wie das einer Zahl zu einer Zahl war, sondern entweder irrational oder transzendent. Um aber Ausdrücke von dieser Art in Kettenbrüche zu verwandeln, es ist von Nöten, dass sie in rationalen Zahlen erklärt sind, zumindest näherungsweise, so wie dies durch Dezimalbrüche geschieht. Wenn man also solcher Ausdrücke hat, dann werden auf die beschriebene Weise die Kettenbrüche gebildet werden.

§14 Nachdem aber ein Bruch oder ein anderer Ausdruck dieser Art in einen Kettenbruch dieser Art umgewandelt worden ist, dann wird ein Näherungswert dieses Ausdruckes auf die in § 10 angegeben werden können. Wie wenn dieser Ausdruck gefunden worden war

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{etc.}}}}}$$

und aus den Nennern a, b, c, d etc. die folgende Reihe von Brüchen gebildet wird

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abcd+c+a}{bc+1}, & \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} & \text{etc.} \end{array}$$

werden diese Brüche dem Ausdruck $\frac{A}{B}$ näherungsweise gleich sein und werden umso weniger entfernt sein, umso weiter sie vom ersten in dieser Reihe entfernt platziert sind. Aber jeder beliebige dieser Brüche wird so beschaffen sein, dass keine anderen durch nicht größere Zahlen dargeboten werden können, die näher an den Wert $\frac{A}{B}$ herankämen. Und auf diese Weise wird deshalb das folgende Problem angenehm gelöst werden:

Einen gegebenen aus großen Zahlen bestehenden Bruch in einen einfacheren umzuwandeln, der an jenen näher herankommt, als es mit nicht größeren Zahlen geschehen kann.

Dieses Problem hat Wallis mit großem Eifer behandelt, hat aber eine sehr aufwändige und schwierige Lösung gegeben.

§15 Um unsere Methode Methode auf die Lösung dieses Problems anzuwenden, sei dieser Bruch vorgelegt

$$\frac{355}{113},$$

der nach Metius näherungsweise das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser ausdrückt; wir wollen also aus kleineren Zahlen bestehende von diesem Bruch so wenig wie möglich abweichende Brüche suchen. Ich dividiere also 335 durch 113 und finde

$$\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$$

woher ich die folgenden Brüche bilde

$$\begin{array}{cccc} 3 & 7 & 16 & \\ \frac{1}{0}, & \frac{3}{1}, & \frac{22}{7}, & \frac{355}{113}; \end{array}$$

die Brüche $\frac{3}{1}$ und $\frac{22}{7}$ kommen als näher an den Bruch $\frac{355}{113}$ heran als jegliche anderen aus nicht größeren Zahlen zusammengesetzten; der eine $\frac{22}{7}$ wird aber größer, der andere $\frac{3}{1}$ kleiner als der vorgelegte sein, wie wir schon oben im Allgemeinen angemerkt haben. Diese Brüche lassen sich die *wesentlichen* nennen, denn außer diesen können andere *weniger wesentliche* dem Gefragten in gleicher Weise Genüge leistende angegeben werden; wie natürlich der Bruch $\frac{22}{7}$ aus den vorhergehenden mit dem Index 7 gebildet worden ist, so werden die weniger wesentlich auf dieselbe Weise gebildet werden, indem anstelle von 7 die einzelnen kleineren Zahlen eingesetzt werden.

§16 Wenn aber das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser genauer angenommen wird und die wiederholte Division, wie es beschrieben worden ist, durchgeführt wird, wird die folgende Reihe von Quotienten hervorgehen

$$3, \quad 7, \quad 15, \quad 1, \quad 292, \quad 1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 1, \quad 14 \quad \text{etc.},$$

aus welchen auf die folgende Weise einfachere Brüche gefunden werden werden

3	7	15	1	292	1	
$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{22}{7}$,	$\frac{333}{106}$,	$\frac{355}{113}$,	$\frac{103993}{33102}$	*Die Wesentlichen*
	$\frac{2}{1}$,	$\frac{19}{6}$,	$\frac{311}{99}$,		$\frac{103638}{32989}$	*Die weniger Wesentlichen*
	$\frac{1}{1}$,	$\frac{16}{5}$,	$\frac{289}{92}$,		$\frac{103283}{32876}$	
		$\frac{13}{4}$,	$\frac{267}{85}$,		$\frac{102928}{32763}$	
		$\frac{10}{3}$,	$\frac{245}{68}$,		etc.	
		$\frac{7}{2}$,	$\frac{223}{71}$,			
		$\frac{4}{1}$,	$\frac{201}{64}$,			
		etc.	etc.			

Auf diese Weise haben wir also zwei Arten von Brüchen erlangt, von denen die einen zu groß, die anderen zu klein sind; es sind natürlich die zu groß, die unter den Indizes 3, 15, 292 enthalten sind, die übrigen sind zu klein. Und daher ist es leicht möglich, die ganze WALLIS'sche Tabelle anzufertigen, die alle an das wahre Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser näher, als es mit nicht größeren Zahlen geschehen kann, herankommenden Verhältnisse umfasst.

§17 Mit dieser Methode wird es auch möglich ein, dass Festlegungsverhältnis der Schaltjahre zu bestimmen, damit die Jahresanfänge immer auf denselben Zeitpunkt fallen. Diese Bestimmung hängt von der Größe des tropischen Jahres ab, welches ich gemäß genauester Beobachtungen und Messungen festlege als

$$365^d 5^h 49' 8''.$$

Der Übertrag über 365 Tage wird also $5^h 49' 8''$ sein, wenn welcher dem vierten Teil eines ganzen Tage gleich gesetzt werden würde, würde sicher immer jedes vierte Jahr als Schaltjaht festgelegt werden; aber weil dieser Übertrag kleiner als 6 Stunden ist, muss die Anzahl der Schaltjahre kleiner angenommen werden; dies wird aus dem Verhältnis von 24^h zu $5^h 49' 8''$ erkannt werden oder aus dem Bruch

$$\frac{21600}{5237},$$

aus welchem folgt, dass in der Zeitspanne von 21600 Jahren nur 5237 Schaltjahre festgelegt werden müssen. Weil aber diese Periode zu groß ist, werden wir kleinere Perioden erhalten, indem aus kleineren Zahlen bestehende Brüche ausfindig gemacht werden, die dem Bruch $\frac{21600}{5237}$ näherungsweise gleich sind. Für dieses Ziel führe ich die folgende Division durch

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r}
5237 & 21600 & 4 & & & \\
 & 20948 & & & & \\ \cline{2-3}
 & 652 & 5237 & 8 & & \\
 & & 5216 & & & \\ \cline{3-4}
 & & 21 & 652 & 31 & \\
 & & & 651 & & \\ \cline{4-5}
 & & & 1 & 21 & 21
\end{array}$$

Nun werden aus den gefunden Quotienten 4, 8, 31, 21, welche die Nenner des Kettenbruches sein werden, die folgenden Brüche gebildet

$$\begin{array}{ccccc}
4 & 8 & 31 & 21 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{1027}{249}, & \frac{21600}{5237}.
\end{array}$$

Von diesen Brüchen gibt der zweite, $\frac{4}{1}$, sofort das Verhältnis des Julianischen Kalenders, in welchem jedes vierte Jahr als Schaltjahr festgelegt wird. Man käme also näher, wenn in 33 nur 8 Schaltjahre eingefügt werden würden, aus dem dritten Bruch heran. Weil es aber zuträglich ist, für die Jahresperiode eine doppelte gerade Zahl zu haben, wollen wir die dem vierten entsprechenden weniger wesentlichen Brüche nehmen, welche durch 4 teilbare Zähler haben; diese werden sein

$$\frac{136}{33}, \quad \frac{268}{65}, \quad \frac{400}{97}, \quad \frac{532}{129}, \quad \frac{664}{161} \quad \text{etc.},$$

deren dritter $\frac{400}{97}$ also zur Berechnung des Kalenders am vorteilhaftesten ist. Es ist aber klar, dass aus ihm im Zeitintervall von 400 Jahren nur 97 Schaltjahre festgelegt werden müssen oder drei Jahre in diesem Intervall, welche im Julianischen Kalender Schaltjahre wären, in gemeine Jahre zu verwandeln sind, was auch die Gregorianische Festlegung vorschreibt. Daher wird eingesehen, dass in einem kleineren Intervall keine genauere Korrektur vorgenommen werden kann. Aber am genauesten mit der Sonne wird der Kalender festgelegt werden, wenn im Intervall von 21600 Jahren ein einziges Jahr, welches nach der Gregorianischen Festlegung ein Schaltjahr sein müsste, in ein gemeines verwandelt wird.

§18 Wir wollen nun die Brüche suchen, die so nahe an $\sqrt{2}$ herankommen, dass keine aus kleineren Zahlen bestehenden näher herankommen können. Es ist aber

$$\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{1000000},$$

welcher Bruch, wenn er durch wiederholte Division gemäß der vorgeschriebenen Art behandelt wird, diese Quotienten geben wird

$$1, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2, \quad 2 \quad \text{etc.},$$

aus welchen die folgenden dem Gefragten Genüge leistenden so wesentlichen wie weniger wesentlichen Brüche gebildet werden werden

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2, & \\[1ex]
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{7}{5}, & \frac{17}{12}, & \frac{41}{29}, & \frac{99}{70}, & \frac{239}{169} & \text{etc.} \\[1ex]
 & & \frac{2}{1}, & \frac{4}{3}, & \frac{10}{7}, & \frac{24}{17}, & \frac{58}{41}, & \frac{140}{99} & \text{etc.} \\[1ex]
\vee & \wedge & \vee & \wedge & \vee & \wedge & \vee & \wedge &
\end{array}$$

von welchen Brüchen alle ungeraden mit dem Zeichen $\vee$ gekennzeichneten größer als $\sqrt{2}$ sind, die übrigen, die das Zeichen $\wedge$ haben, hingegen kleiner als $\sqrt{2}$ sind.

§19 Es ist diese Eigenschaft von $\sqrt{2}$ bemerkenswert, dass alle Quotienten außer dem ersten zwei sind, sodass gilt

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Auf die gleiche Weise werden aber auch, wenn $\sqrt{3}$ entwickelt wird, diese Quotienten aufgefunden

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 1, \quad 2, \quad 1 \quad \text{etc.},$$

so dass gilt

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

Obwohl nämlich aus der Division selbst noch nicht feststeht, ob die Quotienten nach diesem Gesetz weiter fortschreiten, scheint es dennoch nicht nur wahrscheinlich, sondern es kann auch auf die folgende Weise bewiesen werden, wobei wir lehren werden, Werte von Kettenbrüchen dieser Art, in denen die Nenner entweder alle gleich oder alle je zwei oder alle je drei etc. gleich sind, a posteriori ausfindig zu machen.

§19 [a] Es sei also der folgende Kettenbruch vorgelegt

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}$$

welcher $= x$ festgelegt werde; es wird gelten

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{b + x - a};$$

daher wird sein

$$x^2 - 2ax + b + a^2 - ab = 1$$

und

$$x = a - \frac{b}{2} + \sqrt{1 + \frac{bb}{4}}.$$

Daher, wenn $b = 2$ und $a = 1$ war, wird sein

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}} = \sqrt{2};$$

wenn also $b = 2a$ gesetzt wird, wird gelten

$$\sqrt{a^2 + 1} = a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \text{etc.}}}}}$$

woher aus allen Zahlen, die ein Quadrat um die Einheit überschreiten, bequem durch Approximation die Quadratwurzel gezogen werden kann; wie nach Setzen von $a = 2$ die folgenden Brüche dazu dienen werden, um $\sqrt{5}$ näherungsweise zu finden:

$$
\begin{array}{cccccccc}
2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{9}{4}, & \frac{38}{17}, & \frac{161}{72}, & \frac{682}{305}, & \frac{2889}{1292} & \text{etc.} \\
 & \frac{1}{1}, & \frac{7}{3}, & \frac{29}{13}, & \frac{123}{55}, & \frac{521}{233}, & \frac{2207}{987} & \\
 & & \frac{5}{2}, & \frac{20}{9}, & \frac{85}{38}, & \frac{360}{161}, & \frac{1525}{682} & \\
 & & \frac{3}{1}, & \frac{11}{5}, & \frac{47}{21}, & \frac{199}{89}, & \frac{843}{377} &
\end{array}
$$

§20 Es sei nun der folgende Kettenbruch vorgelegt

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \text{etc.}}}}}}}$$

welcher $= x$ gesetzt werde; und der Wert wird auf die folgende Weise aufgefunden werden

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}} = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x - a}}$$

daher wird also $x - a = \frac{x+c.a}{bx+bc-ab+1}$ sein oder auch gelten

$$bxx + bcx - 2abx = abc - a^2b + c;$$

wenn also $c = 2a$ war, wird sein

$$bxx = aab + 2a \quad \text{sowie} \quad x = \sqrt{a^2 + \frac{2a}{b}}.$$

Wenn auf die gleiche Weise festgelegt wird

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}}}$$

wird sein

$$x - a = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + x - a}}}$$

woher folgt

$$(bc+1)x^2 + (bcd + b + d - c - 2abc - 2a)x - abcd + a^2bc - ab - ad$$
$$+aa - cd + ac - 1 = 0.$$

Und auf diese Weise ist es möglich, alle Kettenbrüche dieser Art, von welchen entweder alle oder immer zwei aufeinander folgende oder drei oder vier etc. einander gleich sind, zu summieren. Aber immer ist die Summe oder der Wert x die Wurzel einer quadratischen Gleichung.

§21 Bevor wir dazu fortschreiten, andere Kettenbrüche, in denen die Nenner arithmetische Progressionen festlegen, zu summieren, wollen wir gewisse transzendente Größen entwickeln, welche in Kettenbrüche umgewandelt in einer arithmetischen Progression fortschreitende Nenner geben, damit aus diesen der Weg klarer wird, Kettenbrüche solcher Art zu summieren. Dies also bei Logarithmen und anderen transzendenten Ausdrücken versuchend habe ich entdeckt, dass man zu Kettenbrüchen solcher Art geführt wird, wenn die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist, und gewisse ihrer Potenzen betrachtet werden. Nachdem also diese Zahl $=e$ gesetzt worden ist, wird sein

$$e = 2,71828182845904,$$

nach Umwandeln welches Ausdruckes in einen Kettenbruch sein wird

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

alle dritten Nenner (ab dem zweiten aus) von welchem die arithmetische

Progression 2, 4, 6, 8 etc. festlegen, die übrigen hingegen Einheiten sind. Auch wenn dieses Gesetz allein aus der Betrachtung entdeckt worden ist, scheint es dennoch wahrscheinlich zu sein, dass es bis ins Unendliche gilt, was freilich unten bewiesen werden wird. Wenn auf die gleiche Weise

$$\sqrt{e} = 1,6487212707$$

in einen Kettenbruch umgewandelt wird, wird sein

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{13 + \text{etc.}}}}}}}}}}}$$

dessen Fortschreitungsgesetz dem des vorausgehenden ähnlich ist. Und Ähnliches lässt sich bei anderen Kettenbrüchen beobachten, in welche die Potenzen von e verwandelt wird.

§22 Auf die gleiche Weise habe ich auch die Kubikwurzel aus der Zahl e betrachtet, deren hyperbolischer Logarithmus 1 ist, und ich habe gefunden

$$\frac{\sqrt[3]{e}-1}{2} = 0,1978062125 = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{30+\cfrac{1}{42+\cfrac{1}{54+\text{etc.}}}}}}$$

in den Nennern welches Kettenbruches außer dem ersten eine arithmetische Progression beobachtet wird.

Ähnlich verhält es sich, wenn die Potenzen ganzzahliger Exponenten von e betrachtet werden und in Kettenbrüche transformiert werden. So das Quadrat betrachtend habe ich aufgefunden

$$\frac{e^2-1}{2} = 3,19452804951 = 3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{13+\cfrac{1}{15+\text{etc.}}}}}}}$$

Darauf habe ich auch aus der Zahl e selbst, aus welcher der gebildete Kettenbruch eine unterbrochene arithmetische Progression der Nenner hat, beobachtet, dass durch Verändern weniger Terme ein von dieser Unterbrechung freier Kettenbruch dieser Art gebildet werden kann. Es ist nämlich hervorgegangen

$$\frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}$$

in welchem eine reguläre nach der Differenz 4 fortschreitende arithmetische Progression enthalten ist.

§23 Nachdem ich als beobachtet hatte, dass eine so große Übereinstimmung zwischen Kettenbrüchen, in welchen die Nenner mal eine unterbrochene mal eine ununterbrochene arithmetische Progression festlegen, ist mir der Gedanke gekommen, ob unter Umständen ein Kettenbruch, in welchem die Progression der Nenner unterbrochen ist, in einen anderen nicht unterbrochenen transformiert werden kann. Ich habe also irgendeine Progression a, b, c, d, e etc. betrachtet und zwischen zwei benachbarten Zahlen überall diese zwei Zahlen m, n eigefügt, dass der folgende Kettenbruch hervorginge

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

und ich habe diesen dem folgenden Kettenbruch gleichen gefunden, in welchem die Nenner ohne Unterbrechung fortschreiten,

$$\frac{1}{mn+1}\left((mn+1)a+n+\cfrac{1}{(mn+1)b+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)c+m+n+\cfrac{1}{(mn+1)d+m+n+\text{etc.}}}}\right).$$

Der Beweis dieser Übereinstimmung besteht darin, dass die gewöhnlichen Brüche, mit welchen an den wahren Wert von jedem der beiden herangekommen wird, miteinander übereinstimmen, wie dem, der es ausprobiert, klar zu tage treten wird.

§24 Wenn die eingfügten Größen m, n in ihrer Reihenfolge invertiert werden, wird der zweite Kettenbruch nur im ersten Term einen Unterschied erfahren; daher wird der folgende ziemlich elegante Lehrsatz formuliert, nach welchem sein wird

$$a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}}}-\left(a+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{c+\text{etc.}}}}}}}\right)=\frac{n-m}{mn+1}.$$

Welche Zahlen also auch immer anstelle von a, b, c, d etc. eingesetzt werden, die Differenz zwischen diesen Kettenbrüchen wird immer bekannt und konstant sein, natürlich $=\frac{n-m}{mn+1}$.

§25 Aus derselben gefunden Gleichheit zwischen den oberen Kettenbrüchen, natürlich dem unterbrochenen und dem nicht unterbrochenen, folgt die folgende Gleichheit, indem die Einheit durch jeden von beiden dividiert und auf beiden Seiten dieselbe Größe A addiert wird

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{b+\text{etc.}}}}}}}}=A+\cfrac{mn+1}{(mn+1)a+n+\cfrac{mn+1}{(mn+1)b+n+\cfrac{mn+1}{(mn+1)c+n+\text{etc.}}}}$$

Mit Hilfe dieser Gleichheit wird es also möglich sein, jeglichen Kettenbruch, der eine von den zwei Größen m und n unterbrochene arithmetische Progression hat, in einen anderen umzuwandeln, in welchem die Nenner ohne Unterbrechung fortschreiten. Wenn also, wie wir es in den oberen Brüchen haben, $m=n=1$ gesetzt wird, wird die folgende Gleichung hervorgehen

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}=A+\cfrac{2}{2a+1+\cfrac{2}{2b+1+\cfrac{2}{2c+1+\text{etc.}}}}$$

Weil also aus § 21 gilt

$$\frac{1}{e-2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}}$$

wird es durch Setzen von $A = 1$, $a = 2$, $b = 4$ wie folgt sein

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \text{etc.}}}}}}$$

und daher wird, indem die Einheit durch jede der beiden Seiten dividiert wird, sein

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Auf die gleiche Weise wird aus demselben Paragraphen aufgefunden werden

$$\sqrt{e} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9 + \text{etc.}}}}}}}} = 1 + + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{28 + \text{etc.}}}}}$$

Und diese nun gefundenen Kettenbrüche konvergieren dermaßen, dass ohne Mühe die Werte von e und $\sqrt{e}$ beliebig genau aufgefunden werden können.

§26 Umgekehrt wird hingegen daher auch ein Kettenbruch, in welchem die Nenner in einer nicht unterbrochenen Struktur fortschreiten, in einen anderen transformiert werden können, in welchem die Nenner von den zwei konstanten Zahlen m und n unterbrochen sind; so habe ich gefunden, dass sein wird

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\text{etc.}}}}} = a-n+\cfrac{mn+1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{b-m-n}{mn+1}+\frac{1}{m}+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{\frac{c-m-n}{mn+1}+\frac{1}{m}+\text{etc.}}}}}}$$

oder es wird durch Beseitigen der Brüche in diesen Nennern, wenn es notwendig erschien, sein

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

$$= a - n + \cfrac{mn+1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{mn+1}{b - m - n + \cfrac{mn+1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{mn+1}{c - m - n + \cfrac{mn+1}{m + \cfrac{1}{n + \text{etc.}}}}}}}}}$$

Wenn also $m = n = 1$ gesetzt wird, wird man haben

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

$$= a - 1 + + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}b - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}c - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2}d - 1 + \text{etc.}}}}}}}}}}$$

§27 So wie wir hier Kettenbrüche, deren Nenner so nach einer unterbrochenen Struktur fortschreiten, dass zwischen jeglichen zwei benachbarten zwei konstante Größen platziert worden sind, betrachtet haben, so kann dieselbe Reduktion auch auf zwei oder vier oder sechst oder acht eingefügte konstante Größen ausgedehnt werden. Aber eine ungerade Zahl von konstanten Größen kann nicht eingefügt werden. So, wenn zwischen jeglichen zwei benachbarten der Größen a, b, c, d etc. diese vier m, n, p, q eingefügt werden und der Kürze wegen festgelegt wird

$$mnpq + mn + mq + pq + 1 = P$$

und

$$mnp + npq + m + n + p + q + = Q,$$

wird sein

$$a + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{m + \text{etc.}}}}}}} = \frac{1}{P}\left(Pa + npq + n + q + \cfrac{1}{Pb + Q + \cfrac{1}{Pc + Q + \cfrac{1}{Pd + Q + \text{etc.}}}}\right)$$

Und wenn $m = n = p = q = 1$ war, wird man haben

$$a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}}=\frac{1}{5}\left(5a+3+\cfrac{1}{5b+6+\cfrac{1}{5c+6+\cfrac{1}{5d+6+\text{etc.}}}}\right)$$

Aus diesen entsprießt eine neue Umwandlung von Kettenbrüchen.

§28 Weil ich aber in den vorhergehenden Paragraphen, wo die Zahl e, deren Logarithmus $=1$ ist, und ihre Potenzen in Kettenbrüche umgewandelt werden, die arithmetische Progression der Nenner nur beobachtet habe und ich außer der Wahrscheinlichkeit über die Fortsetzung dieser Progression ins Unendliche nichts habe versichern können, habe ich mich besonders darum bemüht, die Notwendigkeit dieser Progression begründen und sie streng zu beweisen. Und dieses Ziel habe ich auch glücklich mit einer eigentümlichen Methode erreicht, mit welcher ich die Integration dieser Gleichung

$$ady+y^2dx=x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$$

auf die Integration von dieser zurückgeführt habe

$$adq+q^2dp=dp.$$

Denn nach Setzen von

$$p=(2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}$$

habe ich gefunden, dass gilt

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{7a}{p} + \cfrac{\ldots}{\ldots + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}}$$

Daher, weil p durch q gegeben werden kann und $p = (2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}$ ist, kann eine endliche Gleichung zwischen x und y gebildet werden, welche das Integral der Gleichung $ady + y^2dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ sein wird, sooft n eine ganze positive Zahl ist.

§29 Wenn also n als eine unendliche Zahl festgelegt wird, wird der gefundene Ausdruck ein ins Unendliche laufender Kettenbruch sein, dessen Nenner eine arithmetische Progression festlegen. Deswegen wird man die folgende Gleichung haben

$$q = \frac{a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{7a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{9a}{p} + \text{etc.}}}}}$$

und q oder der Wert dieses Kettenbruches wird aus dieser Gleichung

$$adq + q^2dp = dp$$

definiert werden. Es wird also sein

$$\frac{adq}{1-qq}=dp$$

oder

$$\frac{a}{2}\log\frac{1+q}{1-q}=p+C,$$

welche Konstante daraus bestimmt werden muss, dass nach Setzen von $p=0$ $q=\infty$ wird. Deswegen wird $\frac{a}{2}\log\frac{q+1}{q-1}=p$ und $\frac{q+1}{q-1}=e^{\frac{2p}{a}}$ sein, woher werden wird

$$q=\frac{e^{\frac{2p}{a}}+1}{e^{\frac{2p}{a}}-1},$$

welches der Wert des gefundenen Kettenbruches ist. Weil darauf gilt

$$e^{\frac{2p}{a}}=1+\frac{2}{q-1},$$

wird man haben

$$e^{\frac{2p}{a}}=1+\cfrac{2}{\frac{a-p}{p}+\cfrac{1}{\frac{3a}{p}+\cfrac{1}{\frac{5a}{p}+\cfrac{1}{\frac{7a}{p}+\text{etc.}}}}}$$

§30 Wenn $\frac{a}{2p} = s$ oder $a = 2ps$ gesetzt wird, wird sein

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{2}{2s - 1 + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \text{etc.}}}}}$$

Und aus der ersten gefundenen Gleichung wird sein

$$\frac{e^{\frac{1}{s}} + 1}{e^{\frac{1}{s}} - 1} = 2s + \cfrac{1}{6s + \cfrac{1}{10s + \cfrac{1}{14s + \cfrac{1}{18s + \text{etc.}}}}}$$

Wenn die Nenner von diesem mit zwei Einheiten unterbrochen werden, wird man haben

$$\frac{e^{\frac{1}{s}} + 1}{e^{\frac{1}{s}} - 1} = 2s - 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3s - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5s - 1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Aus diesem entspringt der folgende Kettenbruch

$$e^{\frac{1}{s}} = 1 + \cfrac{1}{s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3s-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5s-1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Aus diesen Formeln fließen in der Tat alle oben gefundenen, mit welchen wir gewisse Potenzen von e durch Kettenbrüche ausgedrückt haben, woher die Notwendigkeit der zuvor nur beobachteten Progression eingesehen wird.

§31 Nun haben wir also einen Kettenbruch erlangt, dessen Nenner eine arithmetische Progression festlegen und dessen Wert es darzubieten möglich gewesen ist. Weil aber diese Progression nur eine Gattung der arithmetischen ist, habe ich die allgemeine arithmetische Progression betrachtet und den Kettenbruch, dessen Nenner die Progression festlegen, auf die folgende Weise auf eine Summe zurückgeführt. Es sei natürlich der Kettenbruch vorgelegt, dessen Wert, den ich suche, ich $= s$ setze, so dass gilt

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a+\cfrac{1}{(1+2n)a+\cfrac{1}{(1+3n)a+\cfrac{1}{(1+4n)a+\text{etc.}}}}}$$

von welchem, um den Wert von s zu finden, ich von der Approximation aus zu ihm beginnen möchte. Es wird deshalb durch die oben angegebene Methode sein

$$\begin{array}{cccc} a & (1+n)a & (1+2n)a & (1+3n)a \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a}, & \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1} \quad \text{etc.} \end{array}$$

welche Brüche immer näher an den wahren Wert von s herankommen; und der infinitesimale Wert Bruch wird den wahren Wert von s geben.

§32 Wenn diese Brüche weiter fortgesetzt werden, wird leicht das Gesetz bemerkt werden, nach welchem sie gebildet worden sind, und aus diesem wird geschlossen, dass der infinitesimale Bruch nach der Division des Zählers und des Nenners durch den ersten Term des Nenners sein wird

$$\frac{a+\frac{1}{1\cdot na}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)n^2a^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5}+\text{etc.}}{1+\frac{1}{1(n+1)na^2}+\frac{1}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6}+\text{etc.}},$$

welchem daher s gleich wird. Nach Setzen von $a=\frac{1}{\sqrt{nz}}$ wird also sein

$$s=\frac{1}{\sqrt{nz}}\cdot\frac{1+\frac{z}{1\cdot 1}+\frac{z^2}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)}+\text{etc.}}{1+\frac{z}{1(n+1)}+\frac{z^2}{1\cdot 2(1+n)(1+2n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)}+\text{etc.}};$$

damit welcher Wert erhalten wird, werde festgelegt

$$t=1+\frac{z}{1\cdot 1}+\frac{z^2}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)}+\text{etc.}$$

und

$$u = 1 + \frac{1}{1(n+1)na^2} + \frac{1}{1 \cdot 2(1+n)(1+2n)n^2a^4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6} + \text{etc.},$$

Aber aus der Betrachtung dieser zwei Reihen wird eingesehen, dass gelten wird

$$dt = udz;$$

und auf die gleiche Weise wird entdeckt werden, dass gilt

$$udz + nzdu = tdz.$$

Es werde $t = vu$ gesetzt, dass gilt

$$s = \frac{v}{\sqrt{nz}};$$

es wird sein

$$vdu + udv = udz$$

sowie

$$udz + nzdu = uvdz;$$

aus welchen folgt

$$\frac{du}{u} = \frac{dz - dv}{v} = \frac{vdz - dz}{nz}$$

und daher weiter die folgende nur zwischen z und v bestehende Gleichung

$$nzdv - vdz + v^2dz = nzdz,$$

welche mit den Substitutionen

$$v = z^{\frac{1}{n}}q \quad \text{und} \quad z = r^n.$$

in diese übergehen wird

$$dq + q^2dr = nr^{n-2}dr.$$

Wenn aus dieser Gleichung q durch r bestimmt wird und festgelegt wird

$$r = n^{\frac{-1}{n}}a^{\frac{-2}{n}},$$

wird der gesuchte Wert sein

$$s = arq.$$

§33 Also ist die Angabe des Wertes des vorgelegten Kettenbruches, welchen ich s gesetzt habe, während gilt

$$s = a + \cfrac{1}{(1+n)a + \cfrac{1}{(1+2n)a + \cfrac{1}{(1+3n)a + \cfrac{1}{(1+4n)a + \text{etc.}}}}}$$

auf die Auflösung dieser Gleichung geführt worden

$$dq + q^2 dr = nr^{n-2} dr;$$

das Integral dieser Gleichung muss aber so angenommen werden, dass nach Setzen von $a = \infty$ auch $s = \infty$ oder nach Setzen von $a = 0$ $s = 1$ wird. Daher entspießt die folgende Regel für die einzuführende Konstante in der Integration, dass im Fall, in dem nicht $n > 2$ ist, $q = \infty$ wird, nachdem $r = 0$ gesetzt worden ist. Wir legen aber fest, dass n eine positive Zahl ist, damit ein Kettenbruch entspringt, wie wir ihn bisher betrachtet haben, der positive Nenner hat.

§34 Es ist aber bekannt, dass die gefundene Gleichung

$$dq + qqdr = nr^{n-2} dr$$

mit der schon einst vom Grafen Riccati vorgelegten übereinstimmt und nur in den Fällen integrierbar ist, in denen n eine Zahl dieser Form $\frac{2}{2m+1}$ ist, während m eine ganze positive Zahl bezeichnet, damit wir für n positive Zahlen erhalten. Wegen dieser Fälle wird der Wert des folgenden Kettenbruches

$$a + \cfrac{1}{\cfrac{(2m+3)a}{2m+1} + \cfrac{1}{\cfrac{(2m+5)a}{2m+1} + \cfrac{1}{\cfrac{(2m+7)a}{2m+1} + \text{etc.}}}}$$

immer durch einen endlichen Ausdruck dargeboten werden können. Das wird freilich per se leicht klar; denn nach Setzen von $m = 0$ haben wir diesen Kettenbruch

$$a+\cfrac{1}{3a+\cfrac{1}{5a+\cfrac{1}{7a+\cfrac{1}{9a+\text{etc.}}}}}$$

dessen Wert wir schon oben gefunden haben. Auf diesen kann auch jener allgemeine reduziert werden; denn nach Setzen von $a=(2m+1)b$ wird man haben

$$(2m+1)b+\cfrac{1}{(2m+3)b+\cfrac{1}{(2m+5)b+\text{etc.}}}$$

welcher sooft in diesem schon bekannten enthalten ist, wie m eine ganze positive Zahl war.

§35 Es ist also klar, dass durch die Auflösung dieser Kettenbrüche selbst die Integration der Gleichung

$$dq+q^2dr=nr^{n-2}dr$$

auf die Integration von dieser Gleichung geführt wird

$$dq+q^2dr=2dr,$$

wenn freilich $n=\frac{2}{2m+1}$ war, während m eine ganze positive Zahl bezeichnet. Diese Reduktion selbst habe ich schon oben in § 28 auf dieselbe Weise, auf welche sie aus dieser Quelle durchgeführt werden kann, dargestellt. Damit aber eingesehen wird, auf welche Weise mit dieser Methode der wahre Wert von Kettenbrüchen dieser Art aufgefunden wird, werde ich den Fall $n=2$ oder $m=0$ betrachten, in welchem entspringt

$$s = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \cfrac{1}{7a + \text{etc.}}}}$$

Es wird aber s aus dieser Gleichung aufgefunden werden

$$dq + q^2 dr = 2dr,$$

die auf die entsprechende Weise integriert gibt

$$r = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{q + \sqrt{2}}{q - \sqrt{2}},$$

aus welcher hervorgeht

$$q = \frac{(e^{2r\sqrt{2}} + 1)\sqrt{2}}{e^{2r\sqrt{2}} - 1}.$$

Es ist aber

$$r = \frac{1}{r\sqrt{2}} \quad \text{sowie} \quad s = arq = \frac{q}{\sqrt{2}},$$

woher der Wert von s hervorgehen wird als

$$s = \frac{e^{\frac{2}{a}} + 1}{e^{\frac{2}{a}} - 1},$$

vollkommen wie wir schon oben gefunden haben (§ 29).